OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS
FORHANDLINGER. 1907. N° 3

SUR LA THÉORIE DES ENSEMBLES ET LE CONCEPT DU NOMBRE

PAR

JOHANNES MOLLERUP

1. Dans un mémoire précédent[1] j'ai attiré l'attention sur ce fait qu'un „système incomplet d'axiomes" ne détermine pas un ensemble correspondant composé de tous les éléments qui satisfont aux axiomes. Je vais résumer les exemples dont je me servais alors.

Considérons les axiomes arithmétiques 1—18 indiqués par M. Hilbert[2], et faisons abstraction des trois derniers qui sont: l'axiome de la multiplication d'inégalités, l'axiome dit d'Archimède et l'axiome d'intégrité de Hilbert. Les 15 axiomes à considérer sont: „Sätze der Verknüpfung" (axiomes de combinaison), „Regeln der Rechnung" (règles de calcul) et „Sätze der Anordnung" (axiomes d'ordonnance) à l'exception des trois axiomes que nous venons d'exclure. Nous allons démontrer que *tout* ensemble dont les éléments satisfont aux axiomes 1—15 est sous-ensemble d'un autre ensemble dont les éléments satisfont également à ces axiomes.

Soient a, b, c, ... les éléments d'un tel ensemble. Nous en formons alors des „éléments idéaux" en les combinant deux

[1] Communication faite par l'auteur à une séance de la „Mathematische Gesellschaft" de Gœttingue. Juin, 1906. (Voir Math. Ann. Bd. 64.)

[2] Hilbert: Grundlagen der Geometrie, p. 25.

par deux $(a\,b)$, $(a\,c)$, $(b\,c)$, ..., et les couples ainsi formés doivent être traités d'après les conventions suivantes:

$$(ab)+(cd) = (a+c,\ b+d)\,,$$
$$(ab)\cdot(cd) = (ac-bd,\ ad+bc)\,,$$
$$(ab) = (cd) \text{ si } a=c \text{ et } b=d \text{ et spécialement}$$
$$(ab) = c, \text{ si } a=c \text{ et } b=0\,,$$
$$(ab) > (cd) \text{ si } a>c \text{ ou que } a=c,\ b>d.$$

Il est facile de démontrer qu'en posant les équations ci-dessus proposées les couples en question satisferont à tous les 15 axiomes; ils constituent alors un ensemble où l'ensemble primitif se trouve contenu comme sous-ensemble. Le concept d'un ensemble renfermant tous les éléments qui satisfont aux axiomes 1—15 est donc contradictoire.

Un autre exemple s'obtient en considérant les axiomes 1—16. Dans le cas où les éléments d'un ensemble déterminé satisfont à ces axiomes on peut employer comme éléments idéaux des nombres non archimédiens:

$$a_0\,t^n + a_1\,t^{n+1} + a_2\,t^{n+2} + \ldots.,$$

où $a_0\ a_1\ a_2 \ldots$ se trouvent compris dans l'ensemble, où $a_0 \neq 0$, où n est un entier, positif ou négatif ou = zéro, et où t est un paramètre. En observant les règles de calcul données par M. HILBERT pour cette catégorie de nombres (Grundlagen, p. 95), on verra qu'ils satisfont aux axiomes 1—16; les nombres non archimédiens constitueraient ainsi un ensemble ayant comme sous-ensemble l'ensemble donné, et le concept d'un ensemble comprenant tous les éléments qui satisfont aux axiomes 1—16 est également contradictoire.

Considérons maintenant les axiomes 1—17, parmi lesquels se trouve l'axiome dit d'Archimède, et supposons que les éléments d'un ensemble déterminé satisfassent à ces axiomes, nous pouvons alors, d'aprés M. G. CANTOR[1], former avec ces éléments des séries fondamentales; et nous verrons que les

[1] Math. Ann. Bd. 21.

séries fondamentales ainsi formées satisfont à tous les 17 axiomes. Supposons en outre que les séries fondamentales de l'ensemble donné n'aient pas toutes un point limite — comme c'est le cas pour l'ensemble des nombres rationnels — ; les séries fondamentales seront alors des éléments idéaux et l'ensemble considéré sera sous-ensemble d'un autre ensemble dont les éléments satisfont aux axiomes 1—17. Si au contraire l'ensemble considéré est tel que toute série fondamentale a un point limite dans cet ensemble, en d'autres termes: si nous avons affaire à un ensemble relativement parfait (abgeschlossen), cet ensemble ne sera sous-ensemble dans aucun autre ensemble dont les éléments satisfassent à tous les axiomes 1—17 aussi bien qu'à l'axiome suivant:

18. Toute série fondamentale a un point limite.

Soit l'ensemble considéré, m, sous-ensemble d'un autre ensemble, M, dont les éléments satisfont aux axiomes 1—18, et soit α un élément de M, qui n'est pas contenu das m, en d'autres termes soit α un „élément idéal" ; nous pouvons alors poser:

$$a < \alpha < b$$

où a et b sont tous les deux contenus dans m.

Posons en outre

$$a_1 < \alpha < b_1$$

où $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = b$ ou bien $a_1 = a$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$,

et continuons en posant de même

$$\begin{aligned} &a_2 < \alpha < b_2 \\ &\vdots \\ &a_n < \alpha < b_n \text{ où } b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}. \\ &\vdots \end{aligned}$$

On voit maintenant que les séries fondamentales $(a_1\, a_2\, a_3 \ldots . \, a_n \ldots .)$ et $(b_1\, b_2\, b_3 \ldots . \, b_n \ldots .)$ ont le même point limite; d'après l'axiome 18 ce point est contenu dans l'ensemble m. Mais α est nécessairement identique à ce point limite; il ne peut donc pas être un „élément idéal". Il en résulte, — ce que nous voulions établir, — que m ne peut être sous-ensemble d'aucun autre ensemble dont les éléments satisfassent aux axiomes 1—18, et nous avons démontré que les axiomes 1—18 déterminent l'ensemble de tous les éléments qui satisfont à ces axiomes.

2. Dans les axiomes arithmétiques les nombres 0 et 1 sont donnés ou arbitraires, les axiomes n'impliquant pas leur définition. Soit maintenant S un système d'axiomes donnés; nous devons alors distinguer deux concepts: celui d'une „fonction de 0 et 1 dans le système d'axiomes S", et celui d'un „élément idéal du système d'axiomes S".

Définition. — a est fonction de 0 et 1 dans le système d'axiomes S, si nous le dérivons de 0 et 1 en y faisant application des axiomes; si au contraire a satisfait aux axiomes mais ne peut pas être dérivé de 0 et 1 en y appliquant les axiomes, a sera „un élément idéal dans le système d'axiomes S".

On appelle complet tout système d'axiomes permettant de déduire des axiomes le théorème d'intégrité suivant[1]:

Tout nombre satisfaisant aux axiomes est fonction de 0 et de 1 dans le système d'axiomes

ou

Le système d'axiomes en question n'admet pas d'éléments idéaux.

Dans les exemples ci-dessus cités les couples (ab), (cd), etc. étaient des éléments idéaux du système des axiomes 1—15; de même les nombres non archimédiens étaient éléments idéaux du système des axiomes 1—16. Ces deux systèmes d'axiomes ne sont donc pas complets. Par contre le système des axiomes 1—18 est complet, ne contenant pas d'éléments idéaux.

[1] cf. HILBERT, Grundlagen, p. 16.

Dans le cas d'un système d'axiomes incomplet, le théorème d'intégrité ne peut pas se déduire logiquement des axiomes. Deux choses sont alors possibles: ou le théorème d'intégrité est incompatible avec les axiomes, — et, si tel est le cas, tout ensemble dont les éléments satisfont aux axiomes sera un vrai sous-ensemble d'un autre ensemble de même qualité —; ou le théorème d'intégrité n'est pas contraire aux axiomes, et dans ce cas il existe un ensemble dont les éléments satisfont aux axiomes et qui n'est sous-ensemble d'aucun ensemble de même nature tandis que d'autres ensembles, dont les éléments satisfont aux axiomes, sont sous-ensembles du premier ensemble. Dans le cas d'un système d'axiomes complet, un ensemble dont les éléments satisfont aux axiomes ne sera sous-ensemble d'aucun ensemble dont les éléments satisfont aux axiomes.

3. Ordinairement on établit comme il suit la définition du concept d'ensemble (voir Dedekind, G. Cantor, Peano, Frege [1] et plusieurs autres auteurs):

Pour qu'un ensemble soit bien défini il faut que, un objet quelconque étant choisi, on puisse regarder comme (intrinsèquement) déterminé s'il appartient ou non à l'ensemble en question.

D'après cette définition tous les éléments possédant certaines propriétés prescrites constitueraient un ensemble; on voit de ce qui précède que cette définition du concept d'ensemble n'est pas exempte de contradiction.

Je ne prétends pas donner ici une définition satisfaisante du concept d'ensemble, ni établir les axiomes de la théorie des ensembles. Je vais indiquer les conventions sur lesquelles je baserai les remarques qui vont suivre:

1. Un objet peut être élément d'un ensemble.

[1] Dedekind: Was sind und was sollen die Zahlen; G. Cantor: Acta mathematica, t. II, p. 363; Peano: Arithmetices principia, nova methodo exposita; Frege: Grundlagen der Arithmetik.

2. Un ensemble étant donné, il existe des correspondances univoques et réciproques, c'est-à-dire qu'il y a des lois φ indiquant, pour tout élément a de l'ensemble donné, un nouvel élément $\varphi(a)$ tel que si nous avons $a \neq b$, nous aurons également $\varphi(a) \neq \varphi(b)$.
3. Tous les éléments satisfaisant à un système complet d'axiomes, forment un ensemble.

   (Pour que l'ensemble ne soit pas nul, il faut encore que le système d'axiomes n'implique pas contradiction.)

Cette dernière convention que nous désignerons dans ce qui suit sous le nom d'axiome d'existence, restreint la convention classique d'après laquelle toute collection formerait un ensemble. Nous n'avons pas même besoin ici de cette autre convention selon laquelle les éléments appartenant à un ensemble donné et jouissant d'une propriété déterminée, forment un ensemble. Les trois conventions ci-dessus énumérées constituent un fondement suffisant — quant à la théorie des ensembles — de la présente théorie des nombres entiers.

Je vais en outre donner d'avance les définitions que voici:

M_1 s'appelle sous-ensemble de M si un élément, a, de M_1, par le seul fait d'être élément de M_1, est également élément de M.

M_1, sous-ensemble de M, est un vrai sous-ensemble (*echter Teil*) de M, s'il se trouve en M un élément qui n'est pas élément de M_1.

Deux ensembles sont appelés équivalents lorsque l'un des deux est né d'une correspondance avec l'autre.

Enfin nous allons démontrer la proposition suivante:

En faisant correspondre (par la convention 2) des éléments nouveaux aux éléments d'un ensemble déterminé par un système d'axiomes complet, n'impliquant pas contradiction, on obtiendra un ensemble nouveau.

Supposons en effet qu'il existe une relation quelconque entre les éléments de l'ensemble primitif; nous pouvons alors définir les opérations à effectuer pour les éléments correspondants de sorte que la même relation ait encore lieu. Il faut donc que les éléments correspondants satisfassent à un système correspondant, non-contradictoire et complet, d'axiomes, et, par suite, qu'ils forment un ensemble (d'après l'axiome d'existence).

4. L'application que je vais faire de cette théorie a pour but d'effectuer une réduction du problème des fondements de l'arithmétique. On peut donner de ce problème une définition moderne en disant qu'il consiste à démontrer qu'il n'y a pas de contradiction dans les axiomes de l'arithmétique. Il suffit en effet de considérer les nombres entiers et de s'assurer qu'on ne peut jamais, en appliquant les successions de la suite naturelle et le principe de l'induction complète, être amené à déduire une contradiction. Que le principe de l'induction complète ne soit pas une conséquence des successions de la suite naturelle des nombres c'est un fait que Dedekind[1] et Frege[2] ont reconnu les premiers d'une façon formelle. Supposé qu'une proposition ait lieu pour le nombre a et pour $c+1$ à condition qu'elle ait lieu pour c; il résulte des successions de la suite naturelle qu'elle a lieu pour $a+1$, $a+2$, $a+3$, etc. et il convient de remarquer que cet „etc.“ ne représente pas une suite infinie de syllogismes. La succession à elle seule ne nous assure donc pas de la validité générale de la proposition, et le principe de l'induction complète ne peut pas être déduit de l'énumération successive.

Je ne me propose pas de donner ici un résumé complet des travaux par lesquels on a cherché à démontrer le principe en question ni de ceux où une telle démonstration est regardée comme impossible. Les remarques qui vont suivre ont pour but de rattacher les résultats de la présente étude à ceux des travaux déjà existants.

Les ouvrages les plus importants où l'on ait tâché de déduire le principe de l'induction complète sont les suivants:

[1] Dedekind: Was sind und was sollen die Zahlen.

[2] Frege: l. c.

DEDEKIND: „Was sind und was sollen die Zahlen"; FREGE: „Grundlagen der Arithmetik" et „Grundgesetze der Arithmetik"; RUSSELL: „Principles of Mathematics"; HILBERT: Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik" (Verhandlungen der III internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg 1904). Le point de vue opposé est représenté par POINCARÉ: „La science et l'hypothèse", „Les mathématiques et la logique" (Revue de métaphysique et de morale, 1905 et 1906).

Si on ne peut pas dire que les essais faits par MM. DEDEKIND, FREGE et RUSSELL aient réussi à résoudre le problème, c'est que la définition du concept d'ensemble présente des difficultés considérables, voir plus haut (3). Chez M. DEDEKIND la déduction est irréprochable pour le reste, mais le théorème principal énonçant qu'il existe un ensemble infini, c'est-à-dire un ensemble ayant une correspondance univoque et réciproque à un vrai sous-ensemble de lui-même, n'a pas été démontré. Car M. DEDEKIND se sert, pour le prouver, de l'ensemble de toutes les choses existantes, et ce concept implique inévitablement contradiction (cf. RUSSELL: l. c. ch. X et (1) et (2) dans ce qui précède).

M. FREGE tâche de fonder l'arithmétique sur les règles de la logique formelle, mais il regarde comme établi qu'un concept détermine lui-même son étendue, c'est-à-dire l'ensemble des choses qui y rentrent; et c'est la même difficulté qui revient.

M. RUSSELL a également essayé de montrer que les mathématiques ne sont au fond que de la logique formelle, mais lui aussi regarde le concept d'ensemble comme donné *a priori*. Il définit par exemple l'entier (comme le fait aussi M. WEBER[1]): l'ensemble de tous les ensembles de même puissance, c'est-à-dire entre lesquels il y a une correspondance univoque et réciproque[2]. Cette définition l'expose à émettre au sujet de la

[1] WEBER und WELLSTEIN: Encyclopädie der Elementar-Mathematik I, p. 1—8.

[2] RUSSELL: Principles, ch. XI.

théorie des ensembles des paradoxes sur lesquels il a d'ailleurs lui-même attiré l'attention (ch. X).

Le mémoire si pénétrant de M. HILBERT ne peut pas être esquissé, étant lui-même une esquisse. M. HILBERT a eu l'idée d'énoncer les axiomes, — qui sont essentiellement ceux de M. PEANO [1], excepté l'axiome de l'induction complète, — sous une forme symbolique, et de juger ensuite, d'après la forme des axiomes, du caractère des conclusions qu'ils permettent; selon lui il n'y en a qu'un qui contienne une négation. M. HILBERT en voudrait conclure que des axiomes qui ne contiennent pas de négation on ne peut déduire une contradiction. Reste à savoir si des axiomes en question on peut déduire une proposition qui soit contradictoire à l'axiome contenant la négation. M. HILBERT fait de cette question l'objet d'une recherche; il indique la forme que devrait avoir une telle proposition et finit par répondre par la négative. Ce que je viens de dire des considérations de M. HILBERT ne suffit pas à en donner une idée exacte; nous nous servirons de cet exposé sommaire pour y rattacher les objections de M. POINCARÉ qui sont bien caractéristiques de sa conception du problème qui nous intéresse ici. M. POINCARÉ est d'avis [2] qu'en concluant de la forme des axiomes à la forme des déductions qu'on en peut tirer, M. HILBERT se sert précisément de l'induction complète. Au fond il ne fait qu'affirmer que si n déductions n'ont pas donné de contradiction, le $n+1^{\text{ième}}$ n'en donnera pas non plus. On voit donc que si d'un côté M. HILBERT cherche à analyser le principe de l'induction complète en en bornant l'application aux raisonnements ci-dessus indiqués, M. POINCARÉ d'un autre côté voit dans l'induction un axiome au sujet duquel on ne peut démontrer s'il est exempt de contradiction ou non.

[1] PEANO: l. c.

[2] POINCARÉ: Les mathématiques et la logique, ch. XX (Revue de métaphysique et de morale 1906).

Dans le même mémoire (ch. XXIX) M. Poincaré émet les opinions suivantes comme étant les siennes propres:

On ne peut pas dire que le principe de l'induction complète définisse l'entier parce qu'on ne doit pas se servir d'une définition à moins qu'il ne soit prouvé qu'elle n'implique pas contradiction; et d'après M. Poincaré il est impossible de prouver que le principe de l'induction complète n'implique pas contradiction. De son côté il définit le nombre entier par induction en imaginant une suite de syllogismes, celle par exemple qu'on peut faire en partant d'un système d'axiomes donné: après en avoir fait n syllogismes on peut en tirer un encore, le $n+1^{\text{ième}}$. Et voilà, d'après M. Poincaré l'entier défini par additions successives ou par induction. Mais d'après ce même auteur il ne faut pas en conclure que le principe de l'induction complète soit vrai pour des raisonnements de nature purement logique. — Il ne nous semble pas facile de comprendre pourquoi la définition par induction serait *a priori* plus admissible que la démonstration par induction. Dans les deux cas la difficulté consiste dans la transition brusque du nombre particulier au nombre arbitraire, l'intervalle ne pouvant être rempli que par un „etc.“

Dans ce qui suit la difficulté a été placée dans la démonstration de l'existence d'un ensemble bien ordonné (défini à l'aide d'un système d'axiomes non contradictoire et complet). L'existence d'un ensemble bien ordonné implique toujours la validité d'une proposition d'induction déterminée. C'est ainsi qu'on peut se baser sur l'existence de la $2^{\text{ième}}$ classe de nombres de M. G. Cantor, — caractérisée par ce fait qu'en elle tout nombre est suivi d'un autre et que tout ensemble dénombrable est également suivi d'un nombre, — pour formuler la proposition suivante:

Étant donné qu'une proposition déterminée, où figure un nombre x, a lieu pour $x = n$, supposons qu'en l'admettant pour $x = n$ on puisse conclure qu'elle a lieu également pour

$x = n + 1$, — et supposons aussi qu'en l'admettent pour l'ensemble dénombrable $n_1 n_2 n_3 \ldots\ldots$ on puisse conclure qu'elle a lieu pour $n_\omega = \lim (n_1 n_2 n_3 \ldots\ldots)$: cette proposition aura lieu pour tous les nombres compris dans la 2ième classe de G. Cantor.

§ 1. L'ensemble fini.

Parmi les propositions relatives à une série finie de nombres entiers positifs, nous choisissons les sept suivantes que nous énonçons à titre d'axiomes:

1. Soient a et b deux nombres différents; l'un des deux, et toujours le même, sera toujours plus grand que l'autre, que nous appelons le plus petit; le plus petit de tous les nombres est 0, le plus grand est n. Nous écrivons
$$a > b \text{ ou } a = b \text{ ou } a < b$$
$$a < n \text{ ou } a = n$$
$$0 < a \text{ ou } 0 = a.$$
2. Si $a < b$, et $b < c$, on a $a < c$.
3. Un nombre, que nous appelons 1, est plus grand que 0; il n'y a pas de nombre qui soit à la fois plus grand que 0 et plus petit que 1.
4. Soit a un nombre autre que n — $a \neq n$ — nous obtenons alors, en ajoutant 1 à a, un nombre plus grand, b. On écrit:
$$a + 1 = b > a;$$
(b s'appelle le nombre subséquent de a):
on a $$0 + 1 = 1.$$
5. Pourvu que a ne soit pas $= 0$, il y aura toujours un nombre, x, tel que
$$x + 1 = a$$
(x est le nombre qui précède a).
6. Soit $a < b$ et $b < n$; on a alors $a + 1 < b + 1$.
7. (Axiome de bonne ordonnance) (Wohlordnungs-

satz). Étant donnée une proposition où figure le nombre x, supposons que cette proposition soit vraie pour $x = a$ et qu'elle ne le soit pas pour $x = b$, où $b > a$; elle déterminera alors „par coupure“ un nombre c, $a < c \leqq b$, tel que la proposition n'est pas vraie pour $x = c$, et qu'au contraire elle est vraie pour $x = d$, où $a \leqq d < c$.

L'axiome 4 détermine à l'aide des nombres donnés (non définis) 0 et 1, les nombres nouveaux 2, 3, 4, etc.; elle ne détermine pas un entier arbitraire. Ainsi il n'est pas possible de déterminer à l'aide de cet axiome les nombres intermédiaires entre a et b, $a < b$; on détermine, en partant de a: $a + 1$, $a + 2$, etc.; on ne détermine pas b. Les nombres entiers quelconques se déterminent à l'aide de l'axiome 7.

Nous admettons comme hypothèse fondamentale que ce système d'axiomes soit exempt de contradiction; d'autre part nous sommes à même de démontrer qu'il est complet. D'après l'axiome d'existence il existe donc un ensemble M_n qui comprend tous les nombres satisfaisant aux axiomes 1—7. Cet ensemble est désigné comme „l'ensemble de nombres entiers, positifs, inférieurs ou égaux à n“.

Nous démontrons d'abord le

le théorème 1. Il n'y a pas de nombre intermédiaire entre a et $a + 1$.

En effet il n'y a pas de nombre intermédiaire entre 0 et 1 (axiome 3); il n'y en a pas non plus entre 1 et 2; car si nous avions

$$1 < a < 2$$

nous aurions x déterminé par

$$x + 1 = a$$

intermédiaire entre 0 et 1 (voir les axiomes 5 et 6). On voit de même qu'il n'y a pas de nombre intermédiaire entre 2 et 3, ni entre 3 et 4, etc. Au cas où il y aurait un nombre intermédiaire entre a et $a + 1$, l'axiome 7 déterminerait une coupure e, $0 < e \leqq a$, telle qu'il y aurait un nombre g intermédiaire entre e et $e+1$ et qu'au contraire il n'y en aurait pas entre d et $d+1$ si

$$0 \leqq d < e.$$

Nous déterminerons (axiome 5) h et i par les équations

$$h+1 = g$$

et

$$i+1 = e.$$

En posant $\quad e < g < e+1$

nous obtenons: $\quad i < h < i+1.$

Car si nous avions $\quad i \geqq h,$

on aurait (axiome 6): $\quad i+1 \geqq h+1$

ou $\quad e \geqq g;$

et si nous avions: $\quad h \geqq i+1$

ou $\quad h \geqq e,$

nous aurions: $\quad h+1 \geqq e+1$

ou $\quad g \geqq e+1.$

Donc $\quad i < h < i+1$ et $i < e$,

ce qui implique contradiction.

Théorème 2. Étant donné qu'une proposition où figure le nombre x est vraie pour $x = a$ et pour $x = c+1$, à condition qu'elle soit vraie pour $x = c$, cette proposition sera vraie pour $x = b$, $a < b \leqq n$.

Supposons en effet que la proposition considérée ne soit pas vraie pour $x = b$, elle déterminera alors, d'après l'axiome 7, une coupure, c, entre a et b telle que la proposition soit fausse pour $x = c$ et vraie pour $x = d$, $a \leqq d < c$. Nous déterminerons d à l'aide de l'égalité

$$d+1 = c$$

(axiome 5), où nous avons en effet $d < c$ (axiome 4) et aussi $d \geqq a$; car si nous avions

$$d < a,$$

nous aurions $\quad d+1 = c < a+1,$

donc $\quad a < c < a+1,$

ce qui est contradictoire au théorème 1. La proposition considérée est donc vraie pour $x = d$; d'après l'hypothèse elle est vraie également pour $x = d + 1 = c$, ce qui implique contradiction.

Théorème 3 (Théorème d'intégrité).

Il n'existe pas d'éléments idéaux dans le système des axiomes 1—7; ou:

Soit a un nombre satisfaisant aux axiomes 1—7; a sera fonction de 0, 1 et n du système d'axiomes.

Soit en effet $a \neq 0$ et $a \neq n$: on aura (axiome 1):

$$0 < a < n.$$

La proposition énonçant que „a est plus grand que le nombre x“ est donc vraie pour $x = 0$ et fausse pour $x = n$; elle détermine par conséquent une coupure c, $0 < c < n$, telle que la proposition sera fausse pour $x = c$ et vraie pour $x = d$ si
$$0 \leqq d < c.$$

Nous déterminerons, comme auparavant, le nombre d qui précède immédiatement c, et nous aurons:

$$d < a \leqq d + 1,$$

donc
$$a = d + 1;$$

et le théorème d'intégrité est démontré.

Nous venons de prouver d'après l'axiome d'existence qu'il existe un ensemble de tous les nombres satisfaisant aux axiomes 1—7; cet ensemble est dit „l'ensemble des nombres entiers positifs $\leqq n$“. Il a pour éléments les nombres non définis 0, 1, n et les fonctions de 0, 1, n dans le système des axiomes 1—7.

Dans ce qui suit nous désignerons cet ensemble par la notation M_n.

Théorème 4. Soit $q < n$, il existe alors un ensemble M_q tel que si $a \leqq q$, a se trouve contenu dans M_q, et si $a > q$, a n'est pas contenu dans M_q.

Ce théorème d'existence se démontre également en indiquant un système de propositions, complet et non contradictoire, auquel satisfont les nombres $a \leqq q$. Les propositions

1—7 qui suivent se démontrent en laissant aux signes $\lesseqgtr$ la signification qu'ils avaient dans les axiomes 1—7 de la page 137.

1. Soit $a \leqq q$, et soit $b \leqq q$; il vient $a \lesseqgtr b$ et $a \geqq 0$.
2. Soient $a \leqq q$, $b \leqq q$, $c \leqq q$, $a < b$ et $b < c$; on aura $a < c$.
3. $1 > 0$, et il n'y a pas de nombre intermédiaire entre 0 et 1.
4. $a + 1 = b > a$, si $a \neq q$; $0 + 1 = 1$.
5. L'égalité $x + 1 = a$ détermine x si $a \neq 0$.
6. Si $a < b < q$, nous avons $a + 1 < b + 1$.
7. Le théorème de bonne ordonnance est vrai pour tous les nombres inférieures ou égaux à q.

Ce système de théorèmes étant complet (théorème 3), l'ensemble considéré, M_q, existe bien; il est un vrai sous-ensemble de M_n, puisque M_n contient l'élément n qui n'est pas contenu dans M_q. M_0 ne contient que l'élément 0; il est sous-ensemble de tout ensemble M_q, $q \leqq n$.

Théorème 5. Si M_q a une correspondance univoque et réciproque avec un vrai sous-ensemble de lui-même, M_{q-1} aura également une correspondance univoque et réciproque avec une vraie partie de lui-même ($q - 1$ est le nombre qui vient immédiatement avant q).

Soit φ la correspondance, et désignons par a un élément de M_q qui ne soit la correspondante d'aucun élément de M_q.

1° $a < q$. φ établit la correspondance de M_{q-1} à M'_{q-1}, qui est également une vraie partie de M_q. Si M'_{q-1} ne contient pas l'élément q, M'_{q-1} sera une vraie partie de M_{q-1} qui ne contient pas a. Si au contraire M'_{q-1} contient $q = \varphi(p)$ et que φ fasse correspondre à q l'élément $r = \varphi(q)$, nous obtenons une correspondance, ψ, identique à φ, avec cette différence que q correspond à lui-même tandis que p correspond à r. ψ sera la correspondance demandée.

2° $a = q$. Si φ fait correspondre p à q, φ fera également correspondre à M_{q-1} M'_{q-1} qui est un vrai sous-ensemble de M_{q-1} ne contenant pas p.

Théorème 6. M_n est un ensemble fini.

Sous le nom d'ensemble fini nous désignons d'après M. DEDEKIND[1] un ensemble qui n'a pas de correspondance univoque et réciproque avec un vrai sous-ensemble de lui-même.

M_0 est un ensemble fini puisqu'il ne contient pas de vrai sous-ensemble. Soit M_q un ensemble fini; M_{q+1} sera alors également un ensemble fini d'après le théorème 5. Le théorème à démontrer peut donc se déduire du théorème 2.

Théorème 7. M_n est sous-ensemble d'un ensemble M_t. De deux éléments de M_n, a et b, nous formons le couple (ab), de c et d nous formons (cd), etc. Pour arithmétiser ces couples nous définissons:

$$(a0) = a$$
$$(a1) = a + 1$$
$$(a2) = (a1) + 1$$
etc.

et après avoir défini par ce procédé

$$(ac) = n$$

nous posons
$$(a, c+1) = (n1)$$
$$(a, c+2) = (n2)$$
etc.

ces équations s'appellent les définitions des couples qui en constituent les premiers membres. Que si (ab) était un couple non défini, la proposition énonçant que „(ax) est défini“ serait vraie pour $x = 1$ et fausse pour $x = b$. L'axiome 7 déterminerait donc par coupure le nombre c de sorte que (ac) ne fût pas défini tandis que $(a, c-1)$ serait défini, ce qui n'est pas possible.

Nous définissons encore:

$$(na) > b\,,$$

et
$$(na) \gtreqless (nb) \text{ si } a \gtreqless b$$
$$(na) + 1 = (n, a+1).$$

[1] DEDEKIND: Was sind und was sollen die Zahlen.

Pour arriver à prouver que les couples forment un ensemble, nous allons d'abord montrer qu'ils satisfont à un système complet, non contradictoire, de théorèmes, qui sont les 7 suivants:

1. $a \gtreqless b$; $(na) \gtreqless (nb)$; $(na) \leqq (nn)$; $a \geqq 0$.
2. Soit $a < b$, et $b < c$; on aura $a < c$;
   soit d'autre part $(na) < (nb)$, et $(nb) < (nc)$; on aura $(na) < (nc)$.
3. $1 > 0$; il n'y a pas de nombre, ni de couple, intermédiaire entre 0 et 1.
4. $a + 1 = b > a$; $(na) + 1 = (n, a+1) > (na)$; $0 + 1 = 1$.
5. L'égalité $x + 1 = a$ déterminera x, si $a \neq 0$;
   l'égalité $x + 1 = (na)$ déterminera $x = (nb)$, si $b + 1 = a$.
6. Si $a < b < n$, on aura: $a + 1 < b + 1$; si $(na) < (nb) < (nn)$ on aura $(n, a+1) < (n, b+1)$.
7. Étant donné qu'une proposition où figure le nombre, ou le couple x, est vraie pour $x = a$ et fausse pour $x = b$, cette proposition détermine une coupure telle que le théorème est faux pour $x = c$ et vrai pour $x = d$, si
   $$a \leqq d < c.$$
   Par les notations a, b, c, d nous désignons des nombres ou des couples.

1° Soient a et b des nombres et non des couples; la proposition se confond avec l'axiome de bonne ordonnance ci-dessus énoncé pour les nombres $\leqq n$.

2° Soient a et b des couples, $a = (na_1)$, $b = (nb_1)$; on peut regarder la proposition comme énoncée au sujet d'un nombre y, $(x = (ny))$; elle est vraie pour $y = a_1$ et fausse pour b_1. L'axiome de bonne ordonnance déterminera alors une coupure, c. La coupure demandée sera $c = (nc_1)$.

3° Soit enfin a un nombre et soit b un couple, $b = (nb_1)$, la proposition sera ou vraie ou fausse pour $x = n$; dans le dernier cas la coupure tombera entre a et n. Si au contraire la proposition est vraie pour $x = n$ il se peut qu'il soit vrai pour tous les nombres intermédiaires entre a et n, et alors la coupure doit être déterminée d'après 2°; si la proposition est fausse pour $x = m$, $a < m < n$, la coupure se déterminera d'après 1°.

Le système de théorèmes 1—7 ci-dessus énoncés est complet (théorème 3) de sorte qu'il ne contient pas d'éléments idéaux. D'après l'axiome d'existence il existe donc un ensemble, M_t, de tous les éléments satisfaisant aux théorèmes. Dans cet ensemble, M_t, M_n est contenu comme sous-ensemble.

§ 2. L'ensemble dénombrable.

Définition. a est un nombre fini, s'il est élément d'un ensemble M_n.

Théorème 1. Tous les nombres finis forment un ensemble.

Pour démontrer ce théorème fondamental nous aurons de nouveau recours à un système complet, non contradictoire, de théorèmes auxquels satisfont les nombres finis.

1. Soient a et b des nombres entiers; on aura:

$$a \gtreqless b; \; a \geqq 0.$$

Voici la démonstration: a est contenu dans un ensemble M_n et b appartient à l'ensemble M_q; si n n'est pas élément de M_q, la proposition énonçant que „M_p est un vrai sous-ensemble de M_q“ est vraie pour $p = 0$ et fausse pour $p = n$. Cette proposition déterminera donc une coupure c dans l'ensemble M_n de manière que M_c ne sera pas un vrai sous-ensemble de M_q, tandis que M_{c-1} en sera un au contraire. Il s'ensuit que $c - 1 \leqq q$; et comme M_q contient un élément qui n'est pas contenu dans M_{c-1} nous avons $c - 1 < q$, donc $c \leqq q$; et M_c n'étant pas un vrai sous-ensemble de M_q nous avons $c = q$; q se trouve donc contenu dans M_n. Nous avons donc démontré que si n n'est pas contenu dans M_q, q sera contenu dans M_n ou que

Si M_n n'est pas sous-ensemble de M_q, M_q sera sous-ensemble de M_n.

Il en résulte que a et b se trouvent toujours contenus dans le même ensemble fini, c. q. f. d. (axiome 1, p. 137.)

2. Si $a < b$ et $b < c$ il en résulte que $a < c$;
car M_c a pour vrai sous-ensemble M_b, qui contient à son tour le vrai sous-ensemble M_a; a, b et c sont donc éléments de l'ensemble M_c, c. q. f. d (axiome 2, p. 137.)
3. $1 > 0$, et il n'y a pas de nombre intermédiaire entre 0 et 1 (axiome 3, p. 137).
4. $a + 1 = b > a$ et $0 + 1 = 1$;
car M_c est un vrai sous-ensemble d'un ensemble M_n qui a pour élément $a + 1$, c. q. f. d. (axiome 4, p. 137.)
5. L'égalité $x + 1 = a$ détermine x, si $a \neq 0$ (axiome 5, p. 137).
6. Si $a < b$, il s'ensuit que $a + 1 < b + 1$;
car $b + 1$ existe d'après 4, et $a + 1$ aussi bien que $b + 1$ se trouvent contenus dans M_{b+1}, c. q. f. d. (axiome 6, p. 137.)
7. (Théorème de bonne ordonnance).
Étant donné qu'une proposition où figure un nombre fini x, est vraie pour $x = a$ et fausse pour $x = b > a$, cette proposition déterminera une coupure, c, $a < c \leqq b$, telle que la proposition sera fausse pour $x = c$, et vraie pour $x = d$, $a \leqq d < c$.

Car a et b sont contenus dans un même ensemble satisfaisant à l'axiome 7, p. 138.

Des 7 théorèmes énoncés ci-dessus nous pouvons déduire le théorème d'intégrité énonçant qu'il n'y a pas d'éléments idéaux dans le système des théorèmes.

Admettons que α soit un élément idéal, en d'autres termes que α puisse être substitué à a, b, c ou d dans les sept théorèmes considérés, les nombres n'étant pas supposés finis (voir la Définition de la p. 144). Nous allons ensuite démontrer qu'il y a dans le système des théorèmes une fonction de 0 et 1 qui est supérieure à α. En effet, si tel n'était pas le cas, la proposition énonçant que a est inférieur à une fonction déterminée de 0 et de 1, serait vraie pour $a = 0$ et fausse pour $a = \alpha$. Le théorème 7 précédent détermine donc une coupure c (où c pourrait très bien être également un élément idéal) telle que $c - 1$ soit inférieur à une fonction déterminée de 0 et de 1 tandis que c ne serait pas inférieur à la dite fonction, ce qui est contraire au théorème 6. Il y a donc une fonction de 0 et de 1, qui est supérieure à α. Suit la démonstration appliquée au théorème 3 du § 1.

D'après l'axiome d'existence, il faut maintenant qu'il existe un ensemble de tous les nombres satisfaisant aux théorèmes 1—7 c'est-à-dire à l'ensemble des nombres finis. Tout nombre fini est donc fonction de 0 et de 1 dans ce système de théorèmes.

Théorème 2. (Le principe de l'induction complète). Etant donné qu'une proposition où figure un nombre fini, x, est vraie pour $x = a$ et pour $x = c + 1$, si elle est vraie pour $x = c$, cette proposition sera vraie pour tous les nombres finis $\geqq a$.

Ce théorème se démontre à l'aide des mêmes applications des théorèmes 1—7 que nous avons déjà employées en déduisant le théorème 2 du § 1 des axiomes 1—7 du § 1.

Théorème 3. L'ensemble des nombres finis est infini. (Par „ensemble infini" nous entendons d'après M. DEDEKIND un ensemble ayant une correspondance univoque et réciproque à un vrai sous-ensemble de lui-même.) La correspondance est établie sous sa forme la plus simple en écrivant

$$\varphi(a) = a + 1.$$

Nous avons donc démontré l'existence d'ensembles infinis en nous fondant sur cette hypothèse arithmétique que les 7 axiomes relatifs aux nombres inférieurs ou égaux à n ne contiennent pas de contradiction, et en nous appuyant également sur l'axiome d'existence.

Définition. Un ensemble bien ordonné est un ensemble où 1°: Étants donnés deux éléments, a et b, de l'ensemble, un élement déterminé des deux précédera toujours l'autre; nous écrivons $a < b$; 2°: Si nous avons $a < b$ et $b < c$, il en résulte que $a < c$; 3°: Tout sous-ensemble de l'ensemble M contient un élément déterminé — le premier — qui précède tous les autres.

Théorème 4. L'ensemble des nombres finis est bien ordonné.

Il suffira de démontrer que tout sous-ensemble contient un premier élément. Supposé que le sous-ensemble considéré contienne l'élément 0, 0 en sera le premier élément. Supposé qu'il ne contienne pas 0, mais l'élément a, nous avons ce qu'il nous faut pour déterminer une coupure, c, de manière que le sous-ensemble contienne c, et qu'il ne contienne pas de nombre inférieur à c.

Définition. Un ensemble dénombrable est un ensemble ou identique ou équivalent à l'ensemble des nombres finis.

Théorème 5. Un ensemble quelconque, M, doit ou contenir un sous-ensemble équivalent à tout M_n ou être lui-même équivalent à un M_n déterminé.

M contient un sous-ensemble équivalent à M_0; s'il ne contient pas de sous-ensemble équivalent à M_n, le théorème énonçant que „M contient un sous-ensemble équivalent à M_n" déterminera une coupure c telle que M contienne un sous-ensemble équivalent à M_{c-1}, mais pas de sous-ensemble équivalent à M_c. Or cela revient à dire que M est équivalent à M_{c-1}; car M contient un élément a_p correspondant à tout nombre $p \leqq c-1$; si M contenait encore un élément, a_c, M contiendrait également un sous-ensemble équivalent à M_c.

Donc, si M n'est équivalent à aucun M_n, M doit contenir un sous-ensemble équivalent à tout M_n.

Théorème 6. Si l'ensemble M contient un sous-ensemble équivalent à tout M_n, M sera infini et contiendra un sous-ensemble dénombrable.

M contient un sous-ensemble équivalent à M_0; ce sous-ensemble ne contient qu'un seul élement, a_0. M contient encore un sous-ensemble équivalent à M_1; il faut donc qu'il contienne, à côte de a_0, un élément a_1. M contenant un sous-ensemble équivalent à M_2 doit contenir à côté de a_0 et a_1 un élément a_2. Supposé que M contienne ainsi les éléments $a_0\, a_1\, a_2 \ldots . a_n$, il doit contenir également un élément nouveau, a_{n+1}; car M contient un sous-ensemble équivalent à M_{n+1} et qui ne peut pas être rempli par les éléments $a_0\, a_1\, a_2 \ldots . a_n$. Nous avons donc démontré par induction complète (théorème 2 du § 2) que M contient le sous-ensemble dénombrable

$$a_0\, a_1\, a_2\, a_3 \ldots .$$

Posons maintenant

$$\varphi(a_n) = a_{n+1}\,,$$

et, en cas que M contienne des éléments, b, qui ne se trouvent pas contenus dans le sous-ensemble dénombrable, posons en outre

$$\varphi(b) = b\,,$$

où la correspondance φ est celle qui existe entre M et un vrai sous-ensemble qui ne contient pas a_0. M est donc infini.

Théorème 7. Tout ensemble fini équivaut à un ensemble M_n.

Ce théorème est en effet contenu dans les deux théorèmes précédents.

Les ensembles M_n représentent donc bien tous les ensembles finis.

Définition. Un ensemble fini équivalent à M_n a $n+1$ pour nombre cardinal.

D'après cette définition du nombre cardinal, les ensembles finis équivalents ont le même nombre cardinal.

Par le développement que nous venons de donner, nous avons réduit le problème des fondements de l'arithmétique en posant ce seul postulat que les axiomes relatifs à l'échelle finie des nombres n'impliquent pas contradiction; de ce postulat nous avons déduit l'existence d'une échelle infinie, bien ordonnée, aussi bien que celle du principe de l'induction complète considéré dans toute son étendue. La réduction ainsi obtenue semble en quelque sorte correspondre à celle entreprise par M. M. Pasch dans ses „Vorlesungen über neuere Geometrie" où il établit les axiomes géométriques de l'espace fini pour en déduire ensuite la géométrie de l'espace infini.